

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

7 februarie 2026

Clasa a IX-a

Barem de notare

Nr. item	Soluție , rezolvare	Punctaj parțial	Punctaj
1.	<p>Fie $n, k \in \mathbb{N}^*$, triunghiul OAB cu $OA = n \cdot OB$ și punctele M și N pe latura AB (M între A și N), cu proprietatea ca $\frac{AM}{MN} = \frac{MN}{NB} = k$. Determinați k și n știind ca mediana corespunzătoare laturii MN din triunghiul OMN coincide cu bisectoarea $\angle AOB$ din triunghiul OAB.</p> <p>Notam $NP = PM = a$ și $AM = 2ak$, $NB = 2a/k$.</p> $\frac{PB}{PA} = \frac{k+2}{2k^2+k} = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{n}$ <p>$n = \frac{2k^2+k}{k+2} \in \mathbb{N}^*$, obținem astfel</p> <p>$k=1, n=1$ și $k=4, n=6$.</p>	<p>4 p</p> <p>5 p</p> <p>6 p</p> <p>6 p</p>	21 p
2.	<p>Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x^2 + [x]^2 + \{x\}^2 = 2$.</p> <p>$x^2 + [x]^2 + (x - [x])^2 = 2$, deduce ca</p> <p>$x^2 - [x]x + [x]^2 - 1 = 0$</p> <p>notam $[x] = k$ și ecuația devine $x^2 - kx + k^2 - 1 = 0$ cu $\Delta = 4 - 3k^2$</p> <p>dacă $k=0$, $[x]=0$, $x \in [0,1)$, $x^2=1$, $x=1$ sau -1 fals.</p> <p>dacă $k=1$, $[x]=1$, $x \in [1,2)$, $x^2 - x = 0$, $x=0$ fals și $x=1$ adevărat.</p> <p>dacă $k=-1$, $[x]=-1$, $x \in [-1,0)$, $x^2 + x = 0$, $x=0$ fals și $x=-1$ adevărat.</p> <p>dacă $k^2 \geq 2$, $\Delta < 0$ și ecuația nu are soluții reale.</p>	<p>3 p</p> <p>3 p</p> <p>3 p</p> <p>3 p</p> <p>3 p</p> <p>3 p</p> <p>3 p</p>	21 p
3.	<p>Fie a, b, c numere strict pozitive. Arătați ca $\frac{a}{a^2+bc} + \frac{b}{b^2+ac} + \frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.</p> <p>$\frac{a}{a^2+bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ deducem ca</p> <p>$(a^2+bc)(b+c) \geq 4abc$ (1) dar,</p> <p>$a^2+bc \geq 2a\sqrt{bc}$ și $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ deci prin înmulțire relația (1) devine adevărată.</p> <p>analog $\frac{b}{b^2+ac} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right)$ și $\frac{c}{c^2+ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ și apoi prin însumare obținem inegalitatea cerută.</p>	<p>6 p</p> <p>7 p</p> <p>7 p</p> <p>1 p</p>	21 p
4.	<p>În patrulaterul ABCD, fie O intersecția diagonalelor, iar M, P, Q pe (BD), (AB), respectiv (DC), astfel încât $\frac{BM}{MD} = 4$, $\frac{AP}{PB} = 3$, $\frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3}$. Dacă $AM \parallel OQ \parallel CP$, arătați ca ABCD este paralelogram.</p> <p>$\frac{BM}{MD} = 4$ avem deci $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AD}$ și $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$,</p> <p>$\overrightarrow{OA} = a\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = b\overrightarrow{OD}$, deducem ca $\overrightarrow{AM} = -a \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{b+4}{5} \cdot \overrightarrow{OD}$. (1)</p> <p>$\frac{AP}{PB} = 3$ avem deci $\overrightarrow{CP} = \frac{a-4}{4} \cdot \overrightarrow{OC} + \frac{3b}{4} \cdot \overrightarrow{OD}$. (2)</p> <p>$\frac{DQ}{QC} = \frac{5}{3}$ avem ca $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{OD} + \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{OC}$. (3)</p> <p>$\overrightarrow{OQ}$ și $\overrightarrow{CP}$ coliniari deducem relația $a = 5b + 4$.</p> <p>$\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{OQ}$ coliniari deducem relația $3a + b + 4 = 0$.</p> <p>Obținem astfel ca $a=b=-1$ deci O mijlocul lui AC și BD deci ABCD paralelogram.</p>	<p>4 p</p> <p>3 p</p> <p>4 p</p> <p>4 p</p> <p>4 p</p> <p>4 p</p> <p>2 p</p>	21 p

5	PUNCTE DIN OFICIU		16 p
---	-------------------	--	------